

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д.Т. Чекмарев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail km@mt.unn.ru

Аннотация

Рассматривается метод анализа численных схем, основанных на вариационной постановке задач (вариационно-разностный метод и метод конечных элементов). Метод основан на приведении численных схем к конечно-разностному виду. Полученная стандартная форма записи численной схемы в виде равенства некоторого сеточного оператора нулю далее используется для анализа аппроксимации, устойчивости и других ее свойств. Рассматривается применение данного подхода к широкому классу схем метода конечного элемента – от простейших до эрмитовых и сирендиповых. Возможности подхода иллюстрируются примерами анализа вариационно-разностных и конечно-элементных численных схем решения задач теории пластин типа Тимошенко. Приведенный анализ позволил провести исследование ряда скрытых свойств рассмотренных численных схем, недоступное при анализе традиционными способами метода конечных элементов.

Ключевые слова: вариационно-разностный метод, конечно-разностный метод, метод конечных элементов, ажурная схема, аппроксимация, устойчивость, теория пластин типа Тимошенко

Введение

Предметом исследования в данной работе является сравнительный теоретический анализ численных схем метода конечных разностей (МКР), метода конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностных методов (ВРМ). Учитывая, что они существуют в большом числе вариантов [7, 10, 13, 14, 16, 18 и др.], исследователь неизбежно сталкивается с проблемой выбора метода и конкретной численной схемы при моделировании того или иного физического процесса. При выборе метода основным критерием является эффективность, то есть возможность получить решение заданной

точности с минимальными затратами ресурсов – как человеческих, так и компьютерных.

Сформулируем основные признаки, по которым отличаются конечно-разностные, вариационно-разностные и конечно-элементные методы.

МКР основан на дифференциальной постановке задачи: производные в дифференциальном уравнении заменяются конечно-разностными выражениями, в результате задача сводится к системе алгебраических уравнений.

В-РМ (и, как правило, МКЭ) базируются на вариационной постановке задачи.

В В-РМ интеграл в функционале или вариационном уравнении заменяется квадратурной формулой. В результате из вариационного уравнения получаем систему алгебраических уравнений. МКЭ – проекционно-сеточный метод, отличается от предыдущих тем, что решение ищется не в узлах, а во всей области. Дискретизация получается за счет того, что функция в элементе задается в виде полинома или другой функции, определяемой с помощью конечного набора параметров.

Выбор наиболее эффективного метода численного решения задачи осуществляется на основе теоретического анализа или путем численных экспериментов. При этом первый путь предпочтительнее, если он возможен. К сожалению, не существует общей теории, позволяющей сравнивать численные схемы, основанные на различных подходах к их построению. В работе дается попытка сделать шаг в данном направлении – рассмотреть с единой точки зрения вариационно-разностные и конечно-элементные схемы путем приведения их к единой конечно-разностной форме записи в тех случаях, когда это возможно. Это позволяет теоретически исследовать и сравнивать между собой схемы МКР, В-РМ и МКЭ.

Дается описание метода преобразования, рассмотрены его различные варианты. Приведен анализ аппроксимации ряда вариационно-разностных и конечно-элементных схем теории упругости и теории пластин типа Тимошенко. На основе анализа сделаны выводы об их сходимости, выделены наиболее эффективные схемы. Описан класс новых эффективных ажурных

схем численного решения задач теории упругости, пластин и оболочек.

Работа до известной степени является обзором исследований автора в области вычислительной математики. Более подробно с результатами можно ознакомиться в [1-5, 9, 11, 20, 22, 24].

1. Общий метод преобразования вариационно-разностных и конечно-элементных численных схем к виду конечно-разностных

Теоретическое исследование разностных схем предполагает стандартную форму записи схемы в виде равенства некоторого сеточного оператора нулю. Для общего случая вариационно-разностной или конечно-элементной схемы на нерегулярной сетке от такого представления мало пользы в силу следующих обстоятельств. Во-первых, процедура построения операторов включает трудно формализуемые моменты, связанные с кодировкой ячеек и узлов; во-вторых, от узла к узлу могут меняться не только коэффициенты разностного оператора, но и его шаблон. В случае равномерных (в том числе косоугольных) сеток разностный оператор удастся выписать в конечном виде, пригодном для теоретического анализа методами теории разностных схем [13, 14, 25].

Процедура преобразования [23] аналогична выводу системы дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера) из вариационной задачи.

Сеточный аналог формул интегрирования по частям. Конечно-разностное представление вариационно-разностных схем

Пусть в $R^n = \{X\} = \{(X^1, \dots, X^n)\}$ задана равномерная (в общем случае косоугольная) сетка с координатами узлов

$$X_{(j)} = X_{j_1 \dots j_n} = \begin{bmatrix} X_{j_1 \dots j_n}^1 \\ \dots \\ X_{j_1 \dots j_n}^n \end{bmatrix} = B_h \begin{bmatrix} j_1 \\ \dots \\ j_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0^1 \\ \dots \\ X_0^n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$j_1, \dots, j_n \in Z,$$

где B_h – невырожденная матрица $n \times n$.

Здесь (j) – мультииндекс: $(j) = (j_1, \dots, j_n)$. Сетку (1) назовем основной

сеткой. Пусть в R^n определена вещественная функция $f(X) \in C^2(R^n)$, значения которой в узлах разностной сетки (1) обозначим через $f_{(j)} = f(X_{(j)})$. Таким образом, получили сеточную функцию $\{f_{(j)} \mid (j) \in Z^n\}$. Определим оператор сдвига следующим образом:

$$T_{(k)} f_{(j)} = f_{(j)+(k)} \quad (2)$$

Назовем некоторое конечное множество Π целочисленных n -мерных векторов основным шаблоном. Будем считать шаблон Π невырожденным, то есть не лежащим в какой-либо гиперплоскости. Определим на шаблоне Π линейные операторы $d_0^+, d_1^+, \dots, d_n^+$:

$$d_m^+ = \sum_{(k) \in \Pi} \beta_{(k)}^m T_{(k)}, \quad (3)$$

отображающие множество сеточных функций $\{f\}$ в себя и аппроксимирующие функции и их первые производные:

$$d_0^+ f = f + O(\Delta x), \quad d_m^+ f = \frac{\partial f}{\partial X_m} + O(\Delta x), \quad m = 1, \dots, n \quad (4)$$

Под Δx здесь будем понимать диаметр ячейки разностной сетки:

$$\Delta x = \max_{\{k, l, j=0,1; j=1, \dots, n\}} |X_{(k)} - X_{(l)}|.$$

Возможность построения системы операторов со свойствами (3) очевидным образом следует из невырожденности шаблона.

Приведем конкретные способы аппроксимации производных и функций в двумерном и n -мерном случаях, с помощью которых могут быть построены операторы (4). В двумерном случае часто используются формулы естественной аппроксимации производных [18]:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} = \frac{\sum_{k=1}^m f_k (X_{k+1}^{3-i} - X_{k-1}^{3-i})}{\sum_{k=1}^m X_k^i (X_{k+1}^{3-i} - X_{k-1}^{3-i})}. \quad (5)$$

Здесь верхний индекс – номер координаты, нижний – номер вершины выпуклого многоугольника.

В n -мерном случае можно использовать формулы аппроксимации производных, основанные на применении метода наименьших квадратов:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} = \frac{\det [V^T V_i]}{\det [V^T V]}, \quad (6)$$

где V – прямоугольная матрица $(m - 1) \times n$:

$$\{V_{ij}\} = \{X_i^j - X_m^j\}. \quad (7)$$

Матрица V_i получается из V заменой i -го столбца столбцом $\text{col}(f_i - f_m, \dots, f_{m-i} - f_m)$. В случае $m = n + 1$ (ячейка является симплексом) матрицы V и V_i становятся квадратными и формула (7) упрощается:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} = \frac{\det V_i}{\det V}. \quad (8)$$

В случае $n = 2, m = 3$ (треугольная ячейка на плоскости) формулы (5) и (8) совпадают. Отметим, что для симплексов задача аппроксимации частных производных с первым порядком точности имеет единственное решение.

Для аппроксимации функции в ячейке по заданным значениям в ее вершинах используется формула

$$f = \sum_{k=1}^m C_k f_k, \quad (9)$$

где m – число вершин, $\sum_{k=1}^m C_k = 1$.

На практике наиболее часто используется либо аппроксимация функции ее значением в одном (i -м) узле ($C_i = 1, C_j = 0, j = 1, \dots, m, i \neq j$), либо среднее арифметическое ($C_i = 1/m, i = 1, \dots, m$). Последний вариант совпадает с результатом, полученным методом наименьших квадратов, поэтому он является более предпочтительным, если нет каких-либо высших соображений.

Определим операторы $d_0^-, d_1^-, \dots, d_n^-$ посредством равенств

$$d_m^- = \chi_m \sum_{(k) \in \text{III}} \beta_{(k)}^m T_{-(k)}, \quad (10)$$

где $\beta_{(k)}^m$ ($m = 0, \dots, n$) – коэффициенты из формул (3), $\chi_0 = 1, \chi_m = -1, (m = 1, \dots, n)$.

Следствием (3), (4), (10) является

$$d_0^- \bar{f} = f + O(\Delta x), \quad d_m^- \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial X^m} + O(\Delta x), \quad m = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Разностные операторы d_m^+ и d_m^- можно рассматривать как обобщение на многомерный случай соответственно правых и левых конечных разностей.

Пусть в области $V \subset R^n$ определены две вещественные функции $f, g \in C^1(R^n)$, удовлетворяющие на границе области условиям $f=g=0$. Рассмотрим сеточную область $\bar{V} = \{(j) \mid X_{(j)} \in V\}$. Определим сеточные функции f, g , полагая $f_{(j)} = f(X_{(j)})$, $g_{(j)} = g(X_{(j)})$ при $(j) \in \bar{V}$; $f_{(j)} = g_{(j)} = 0$ при $j \notin \bar{V}$.

Рассмотрим интегралы

$$\int_V f g dV, \quad \int_V f \frac{\partial g}{\partial X^m} dV \quad (m = 1, \dots, n)$$

и их разностные аналоги

$$\sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V \quad (m = 0, \dots, n),$$

где $\Delta V = \det B$ – объем элементарной ячейки разностной сетки (1).

Теорема [разностный аналог формул интегрирования по частям]. *Справедливы равенства*

$$\sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V = \chi_m \sum_{(j) \in \bar{V}} (d_m^- f)_{(j)} g_{(j)} \Delta V, \quad (m = 0, \dots, n) \quad (12)$$

Доказательство см. [3].

Равенства (12) допускают другую интерпретацию.

Определим скалярное произведение сеточных функций f и g как

$$(f, g) = \sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} g_{(j)} \Delta V,$$

тогда равенства (12) можно записать в виде

$$(f, d_m^+ g) = (\chi_m d_m^- f, g). \quad (13)$$

Теорема может быть сформулирована таким образом:

Оператор $\chi_m d_m^-$ является сопряженным к оператору d_m^+ .

Рассмотрим применение формул (12) к преобразованию вариационно-разностных схем в конечно-разностный вид.

Пусть $u = (u_1, \dots, u_m)$ – векторная функция в R^n , $p_{jk} = \frac{\partial u_j}{\partial X^k}$,

$$W = \int_V F(u_1, \dots, u_n, p_{11}, \dots, p_{mn}) dV \quad (14)$$

– функционал. В вариационном уравнении

$$\delta W = \int_V \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial F}{\partial u_j} \delta u_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} \delta \left(\frac{\partial u_j}{\partial X^k} \right) \right] dV = 0 \quad (15)$$

заменим интеграл конечной суммой

$$\sum_{(l) \in \bar{V}} \left\{ \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial u_j} \delta (d_0^+ u_j)_{(l)} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial p_{jk}} \right)_{(l)} \delta (d_k^+ u_j)_{(l)} \right] \right\} \Delta V = 0, \quad (16)$$

где $f(u_1, \dots, u_m, p_{11}, \dots, p_{mn})$ – сеточная функция, аппроксимирующая F . Применяя к (16) теорему, получим для внутренних точек сеточной области систему уравнений (разностный аналог уравнений Эйлера вариационной задачи)

$$d_0^- f_{j0} - \sum_{k=1}^n d_k^- f_{jk} = 0, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (17)$$

Здесь $f_{j0} = \partial f / \partial u_j$, $f_{jk} = \partial f / \partial p_{jk}$.

Под внутренними точками сеточной области будем понимать множество

$$\bar{V} \setminus \{(j) \pm (k) \mid (k) \in \Pi (j) \in Z^n \setminus \bar{V}\}.$$

Таким образом, установлено важное

Следствие из теоремы. Вариационно-разностное уравнение (16) эквивалентно разностной схеме (17).

Полученный результат (теорема и ее следствие) фактически является сеточным аналогом приведения вариационной задачи к системе дифференциальных уравнений Эйлера. Его основное содержание – эквивалентность вариационно-разностной и конечно-разностной формулировок задачи.

При выводе системы сеточных уравнений (17) неявно предполагалось, что в каждой ячейке основной сетки (n -мерном параллелепипеде) находится ровно одна ячейка вариационно-разностной сетки (это соответствует случаю четырехугольных ячеек в R^2 и не соответствует случаю тре-

угольных, когда каждый параллелограмм разбивается на два треугольника). Предположим, что каждая базовая ячейка сетки (1) (n -мерный параллелепипед) разбита на p ячеек вариационно-разностной схемы (n -мерных многогранников с вершинами в узлах элементарной ячейки). Каждому многограннику соответствует свой шаблон и соответственно система операторов d_q^{l+} ($q=0, \dots, n; l=1, \dots, p$). Пусть объемы многогранников равны $\gamma_l \Delta V$ ($l=1, \dots, p$). При этом $\sum_{l=1}^p \gamma_l = 1$. Тогда система уравнений (17) примет вид

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l d_0^{l-} f_{j0l} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \gamma_l d_k^{l-} f_{jkl} = 0 \quad (18)$$

(здесь $f_{j0l} = \partial f / \partial u_j$, $f_{jkl} = \partial f / \partial p_{jk}$ соответственно для ячейки l -го типа).

1.1. Конечно-разностное представление схем МКЭ

Данный подход допускает обобщение на схемы МКЭ. Рассмотрим его для наиболее типичного случая метода конечного элемента, основанного на вариационной постановке задачи минимизации функционала в виде интеграла.

Метод применим к численным схемам МКЭ, основанным на вариационной постановке задачи, при следующих ограничениях:

- 1) сетка регулярная;
- 2) сетка равномерная;
- 3) подынтегральная функция в функционале за исключением своей линейной части явно не зависит от координат.

При этом только первое ограничение является принципиальным для применения данного метода. Два других приняты с целью уменьшения технических трудностей при преобразованиях и получения сеточных уравнений с постоянными коэффициентами, что является обычным для теории разностных схем. Изложение метода в общем n -мерном случае сопряжено с определенными техническими трудностями, поэтому ограничимся двумерным случаем, обобщение которого на общий случай очевидно.

Пусть в $R^2 = \{x\} = \{(x^1, x^2)\}$ задана равномерная параллелограммная

основная сетка вида (1) с координатами узлов

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{bmatrix} = B_h \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} \quad i, j \in Z, \quad (19)$$

где B_h – вещественная невырожденная матрица 2×2 . Для большей определенности уточним понятие регулярной и равномерной конечно-элементной сетки.

Определение 1. Конечноэлементную сетку в R^2 назовем равномерной, если элементы и их узлы расположены двоякопериодически с периодом, задаваемым некоторой сеткой вида (19).

Определение 2. Конечноэлементную сетку в R^2 назовем регулярной, если существует взаимнооднозначное непрерывное отображение R^2 в себя, переводящее ее в равномерную.

Под (i, j) -й ячейкой основной сетки будем понимать параллелограмм с вершинами в узлах x_{ij} , x_{i+1j} , x_{ij+1} , x_{i+1j+1} . Согласно определению, ячейка может содержать один или несколько конечных элементов. Для узлов конечных элементов, совпадающих с узлами основной сетки, будем использовать целые индексы, для остальных – дробные.

Пусть в R^2 определена вещественная функция $f(x^1, x^2) \in C^2(R^2)$. Шаблоном Π назовем некоторое подмножество множества целочисленных векторов $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Значение функции f в узлах сетки $f(x_{ij})$ обозначим f_{ij} . Определим разностные операторы, аппроксимирующие функцию и ее производные на сетке (19). Количество разностных операторов возьмем равным числу узлов шаблона. В зависимости от числа узлов возможны следующие ситуации:

1. а) 4 узла, 4 оператора d_0^+ , d_1^+ , d_2^+ , d_3^+ , где

$$\begin{aligned} d_0^+ f &= f + O(h), \quad d_1^+ f = \frac{\partial f}{\partial x^1} + O(h), \quad d_2^+ f = \frac{\partial f}{\partial x^2} + O(h), \\ d_3^+ f &= a \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} + c \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} + O(h). \end{aligned} \quad (20)$$

В последнем операторе коэффициенты a , b , c зависят от формы ячейки (матрицы B_h).

2. b) 3 узла, 3 оператора d_0^+ , d_1^+ , d_2^+ – так же, как для 4 узлов, но без оператора d_3^+

3. c) 2 узла, 2 оператора d_0^+ , d_1^+

$$d_0^+ f = f + O(h), \quad d_1^+ f = a \frac{\partial f}{\partial x^1} + b \frac{\partial f}{\partial x^2} + O(h) \quad (21)$$

(коэффициенты a, b зависят от матрицы B_h , по сути – это производная по направлению, проходящему через два узла ячейки)

4. d) 1 узел, 1 оператор $d_0^+ f = f + O(h)$.

Двойственные операторы d_m^- аппроксимируют те же величины, что и исходные. Значение χ_m в формулах (10) определяется по правилу: (+1) для операторов, аппроксимирующих функцию и производные четного порядка, (-1) – для производных нечетного порядка.

Рассмотрим наиболее распространенный подход к построению схем МКЭ. Пусть задан функционал

$$W = \int_{\Omega} F(u, p_1, p_2) d\Omega, \quad (22)$$

где u – неизвестная функция (вообще говоря, векторная), удовлетворяющая заданным граничным условиям; $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x^1}$, $p_2 = \frac{\partial u}{\partial x^2}$.

Требуется найти функцию u , доставляющую функционалу W экстремальное или стационарное значение.

Решение указанной задачи удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial p_2} = 0 \quad (23)$$

и граничным условиям.

Построение численной схемы МКЭ сводится к разбиению области на конечные элементы (построению конечноэлементной сетки) и выбору базисных функций, после чего задача МКЭ определена. Далее она известными методами [10, 16] редуцируется к системе алгебраических уравнений.

Будем считать, что задача МКЭ определена, то есть задан функционал (22), построена конечно-элементная сетка и выбраны базисные функции.

Рассмотрим преобразование схемы МКЭ к конечно-разностному виду для ряда случаев по возрастанию сложности.

1.2. Схемы, содержащие только узлы основной сетки

Будем считать, что каждая ячейка основной сетки разбита на r конечных элементов. Тогда функционал (22) может быть записан в виде

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \int_{E_{ijk}} F(u, p_1, p_2) d\Omega, \quad (24)$$

где E_{ijk} – k -й элемент в (i, j) -й ячейке основной сетки. Полагая, что элемент k -го типа содержит m_k узлов, имеет шаблон Π_k , построим для него систему разностных операторов $d_0^{k+}, \dots, d_{m_k-1}^{k+}$. Неизвестная функция u в элементе задается в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} C_{lk} \varphi_{lk}, \quad (25)$$

где φ_{lk} ($l = 0, \dots, m_k - 1$) – базисные функции элемента k -го типа. Коэффициенты C_{lk} могут быть выражены через значения функции u в узлах элемента, а далее – через разностные операторы $d_0^{k+}, \dots, d_{m_k-1}^{k+}$. В результате функция u в элементе E_{ijk} может быть представлена в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} (d_l^{k+} u)_{ij} \psi_{lk}, \quad (26)$$

где ψ_{lk} – некоторые линейные комбинации функций φ_{lk} .

После подстановки (26) в (24) и точного или приближенного интегрирования по элементам получим

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \gamma_k \Phi_k(\xi_{ij0}, \dots, \xi_{ijm_k-1}). \quad (27)$$

где $\xi_{ijl} = (d_l^{k+} u)_{ij}$. Запишем вариацию функционала (??):

$$\delta W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \gamma_k (f_{k0} \delta (d_0^{k+} u) + \dots + f_{km_k-1} \delta (d_{m_k-1}^{k+} u))_{ij}. \quad (28)$$

Здесь используются обозначения

$$(f_{kl})_{ij} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_{ijl}}$$

Подставляя (28) в дискретное вариационное уравнение

$$\delta W_h = 0$$

и применяя разностный аналог формул интегрирования по частям, получим равенство

$$\sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \gamma_k \sum_{l=0}^{m_k-1} \chi_l d_l^{k-} f_{kl} \delta u_l = 0.$$

Так как δu_l – произвольная сеточная функция, последнее равенство удовлетворяется при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^r \gamma_k \sum_{l=0}^{m_k-1} \chi_l d_l^{k-} f_{kl} = 0 \quad (29)$$

во всех узлах разностной сетки. Уравнение (29) представляет из себя разностную схему, записанную в стандартном виде – в виде равенства сеточного оператора нулю.

Таким образом, получен окончательный вид разностной схемы, эквивалентной задаче метода конечного элемента.

1.3. Эрмитовы элементы, содержащие только узлы основной сетки

Рассмотрим схемы МКЭ, для которых сохраняется непрерывность первых частных производных на границах элементов (элементы с более высокой степенью гладкости могут быть рассмотрены аналогично). Данный случай отличается от предыдущего необходимостью введения дополнительных сеточных функций – значений первых частных производных в узлах сетки. Общая схема вывода при этом сохраняется. Функционал (22) записывается в виде (24). Неизвестная функция в элементе k -го типа задается в виде

$$u = \sum_{l=0}^{3m_k-1} C_l \varphi_{lk}, \quad (30)$$

а после преобразования – в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} \left[(d_l^{k+} u)_{ij} \psi_{lk0} + (d_l^{k+} p_1)_{ij} \psi_{lk1} + (d_l^{k+} p_2)_{ij} \psi_{lk2} \right], \quad (31)$$

где ψ_{lkm} – линейные комбинации функций φ_{lk} . После подстановки (31) в (24) и интегрирования получим формулу, аналогичную (27)

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \gamma_k \Phi_k (\xi_{ij0}, \dots, \xi_{ijm_k-1}, \eta_{ij0}, \dots, \eta_{ijm_k-1}, \varsigma_{ij0}, \dots, \varsigma_{ijm_k-1}), \quad (32)$$

где $\xi_{ijlk} = (d_l^+ u)_{ij}$, $\eta_{ijlk} = (d_l^+ p_1)_{ij}$, $\varsigma_{ijlk} = (d_l^+ p_2)_{ij}$. Записывая дискретное вариационное уравнение $\delta W_h = 0$ для функционала (32) и осуществляя разностное интегрирование по частям, получим окончательный вид разностной схемы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \gamma_k \sum_{l=0}^{m_k-1} \chi_l d_l^{k-} f_{kl} &= 0, \\ \sum_{k=1}^r \gamma_k \sum_{l=0}^{m_k-1} \chi_l d_l^{k-} g_{1kl} &= 0, \\ \sum_{k=1}^r \gamma_k \sum_{l=0}^{m_k-1} \chi_l d_l^{k-} g_{2kl} &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\left(\text{здесь } f_{kl} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_{ijl}}, \quad g_{1kl} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_{ijl}}, \quad g_{2kl} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varsigma_{ijl}} \right).$$

1.4. Схемы, содержащие узлы, не совпадающие с основной сеткой

Каждый узел элемента вида $x_{i+\alpha j+\beta}$ (где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$), не совпадающий с основной сеткой, порождает параллельную сетку, сдвинутую относительно основной на некоторый начальный вектор. Пусть имеется $s - 1$ такая дополнительная сетка, порожденная узлами

$$x_{i+\alpha_2 j+\beta_2}; \dots; x_{i+\alpha_s j+\beta_s}$$

Для значений функции u в узлах дополнительных сеток введем обозначения

$$u(x_{i+\alpha_k j+\beta_k}) = u_{ij}^k (k = 2, \dots, s). \quad (34)$$

Функцию $u_{ij} = u(x_{ij})$ переобозначим в u_{ij}^1 .

Таким образом, на основной сетке определены s сеточных функций u^1, \dots, u^s .

Предположим, что каждая ячейка разбита на r элементов, а k -й элемент содержит $m_{k1} + \dots + m_{ks}$ узлов (где m_{ki} – число узлов i -й сетки, содержащейся в k -м элементе. Соответственно, для k -го элемента определим шаблоны $\text{ш}_{k1}, \dots, \text{ш}_{ks}$ и разностные операторы $d_0^{k1+}, \dots, d_{m_{k1}-1}^{k1+}, \dots, d_0^{ks+}, \dots, d_{m_{ks}-1}^{ks+}$. Неизвестная функция u в элементе E_{ijk} задается в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_{k1}+\dots+m_{ks}} C_l \varphi_{lk}, \quad (35)$$

$$u = \sum_{n=1}^s \sum_{l=0}^{m_{kn}-1} (d_l^{kn+u})_{ij} \psi_{nlk}, \quad (36)$$

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \gamma_k \Phi_k \left(\xi_{ij10k}, \dots, \xi_{ijs(m_{ks}-1)k} \right). \quad (37)$$

Далее, пропуская промежуточные выкладки, запишем разностную схему

Здесь $f_{pkl} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_{ijplk}}$.

Рассмотренный метод преобразования схем МКЭ в конечно-разностные может быть полезен при теоретическом анализе широкого класса схем МКЭ, как для линейных, так и для нелинейных задач. Примеры преобразований, рассмотренные в [5] показывают, что схемы, подобные традиционным конечно-разностным, получаются только на простых элементах — линейных и билинейных. Элементы с большим числом узлов, а также эрмитовы

элементы приводят к существенному усложнению как получаемых разностных схем, так и их дальнейшего анализа. В связи с этим на первый план выходит задача автоматизации преобразований и анализа полученных схем с помощью аналитических вычислений на ЭВМ. В целом рассмотренный в данном разделе метод позволяет сократить разрыв между теориями разностных схем и метода конечного элемента. Его можно рассматривать как первый этап исследования различных свойств вариационно-разностных и конечно-элементных схем – аппроксимации, устойчивости, дисперсионных свойств, консервативности, монотонности и т.д.

2. Анализ аппроксимации и устойчивости вариационно-разностных и конечно-элементных схем теории пластин типа Тимошенко

Введем обозначения:

t – время;

$u(X^1, X^2, X^3) = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – тензор деформации;

σ_{ij} – тензор напряжений;

Характеристики материала:

E – модуль Юнга;

ν – коэффициент Пуассона;

ρ – плотность;

$\lambda = E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$, $\mu = E / [2(1 + \nu)]$ – параметры Ламе;

k^2 – безразмерный коэффициент в теории пластин типа Тимошенко [17].

Применим процедуру вывода конечно-разностных схем к однородной ли-

нейной системе уравнений теории пластин Тимошенко

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{(1-\nu^2)} \Delta u_1^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial X^2} \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial X^1} - \frac{\partial u_1^0}{\partial X^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{E}{(1-\nu^2)} \Delta u_2^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial X^1} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial X^2} - \frac{\partial u_2^0}{\partial X^1} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{k^2 E}{(1-\nu^2)} \left(\Delta u_3^0 + \frac{\partial u_1^1}{\partial X^1} + \frac{\partial u_2^1}{\partial X^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta u_1^1 + \frac{Eh^2}{24(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial X^2} \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial X^1} - \frac{\partial u_1^1}{\partial X^2} \right) - \\
& - \frac{Ek^2}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial X^1} + u_1^1 \right) - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta u_2^1 + \frac{Eh^2}{24(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial X^1} \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial X^2} - \frac{\partial u_2^1}{\partial X^1} \right) - \\
& - \frac{Ek^2}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial X^2} + u_2^1 \right) - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Здесь функции $u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1, u_3^0$ – коэффициенты разложения компонент вектора перемещений по координате X^3 :

$$\begin{aligned}
u_1(X^1, X^2, X^3) &= u_1^0(X^1, X^2) + X^3 u_1^1(X^1, X^2); \\
u_2(X^1, X^2, X^3) &= u_2^0(X^1, X^2) + X^3 u_2^1(X^1, X^2); \\
u_3(X^1, X^2, X^3) &= u_3^0(X^1, X^2)
\end{aligned}$$

Данная система уравнений распадается на две: два первых уравнения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости, остальные три описывают поперечные колебания пластины. Особенностью последней системы уравнений является ее вырождение, связанное с наличием малого параметра h – толщины пластины. В связи с этим велика вероятность построения неудачных численных методов ее решения, что и показано ниже.

Внутренняя энергия деформированной пластинки имеет вид

$$\begin{aligned}
W = & \frac{h}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{E}{(1-\nu f^2)} \left((u_{i,i}^0)^2 + \frac{h^2}{12} (u_{i,i}^1)^2 \right) + \frac{k^2 E}{2(1+\nu)} (u_i^1 + u_{3,i}^0)^2 \right] + \\
& + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \left(u_{1,1}^0 u_{2,2}^0 + \frac{h^2}{12} u_{1,1}^1 u_{2,2}^1 \right) + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0)^2 + \frac{h^2}{12} (u_{1,2}^1 + u_{2,1}^1)^2 \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{40}$$

а ее вариация –

$$\begin{aligned}
\delta W = & \int_{\Omega} \frac{hE}{1-\nu^2} \left[(u_{1,1}^0 + \nu u_{2,2}^0) \delta u_{1,1}^0 + (u_{2,2}^0 + \nu u_{1,1}^0) \delta u_{2,2}^0 \right] + \\
& + \frac{hE}{2(1+\nu)} (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) (\delta u_{1,2}^0 + \delta u_{2,1}^0) + \\
& + \frac{k^2 E}{2(1+\nu)} \left[(u_1^1 + u_{3,1}^0) (\delta u_1^1 + \delta u_{3,1}^0) + (u_2^1 + u_{3,2}^0) (\delta u_2^1 + \delta u_{3,2}^0) \right] + \\
& + \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(u_{1,1}^1 + \nu u_{2,2}^1) \delta u_{1,1}^1 + \right. \\
& \left. + (u_{2,2}^1 + \nu u_{1,1}^1) \delta u_{2,2}^1 \right] + \frac{h^3 E}{24(1+\nu)} (u_{1,2}^1 + u_{2,1}^1) (\delta u_{1,2}^1 + \delta u_{2,1}^1) d\Omega
\end{aligned} \tag{41}$$

Для построения вариационно-разностной схемы запишем сеточную аппроксимацию (41). В результате получим:

$$\begin{aligned}
\delta W_h = & \sum \left\{ \frac{hE}{1-\nu^2} \left[(d_1^+ u_1^0 + \nu d_2^+ u_2^0) d_1^+ \delta u_1^0 + (d_2^+ u_2^0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \nu d_1^+ u_1^0) d_2^+ \delta u_2^0 + \right. \right. \\
& + \frac{hE}{2(1+\nu)} (d_2^+ u_1^0 + d_1^+ u_2^0) (d_2^+ \delta u_1^0 + d_1^+ \delta u_2^0) + \\
& + \frac{k^2 E}{2(1+\nu)} \left[(d_0^+ u_1^1 + d_1^+ u_3^0) (d_0^+ \delta u_1^1 + d_1^+ \delta u_3^0) + \right. \\
& \left. + (d_0^+ u_2^1 + d_2^+ u_3^0) (d_0^+ \delta u_2^1 + d_2^+ \delta u_3^0) \right] + \\
& + \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \left[(d_1^+ u_1^1 + \nu d_2^+ u_2^1) d_1^+ \delta u_1^1 + (d_2^+ u_2^1 + \nu d_1^+ u_1^1) d_2^+ \delta u_2^1 \right] + \\
& \left. + \frac{h^3 E}{24(1+\nu)} (d_2^+ u_1^1 + d_1^+ u_2^1) (d_2^+ \delta u_1^1 + d_1^+ \delta u_2^1) \right\}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Применяя к (42) разностное интегрирование по частям и добавляя инерционные слагаемые в дискретном виде, из принципа виртуальных перемещений получим разностную схему "крест" теории пластин Тимошенко

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-\nu^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} (D_{12} u_2^0 - D_{22} u_1^0) = \rho D_{tt} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-\nu^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} (D_{21} u_1^0 - D_{11} u_2^0) = \rho D_{tt} u_2^0, \\
& \frac{E k^2}{2(1+\nu)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01} u_1^1 + D_{02} u_2^1) = \rho D_{tt} u_3^0, \\
& \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{E h^2}{24(1-\nu)} (D_{12} u_2^1 - D_{22} u_1^1) - \\
& - \frac{E k^2}{2(1+\nu)} (D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1) = \rho \frac{h^2}{12} D_{tt} u_1^1, \\
& \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{E h^2}{24(1-\nu)} (D_{21} u_1^1 - D_{11} u_2^1) - \\
& - \frac{E k^2}{2(1+\nu)} (D_{20} u_3^0 + D_{00} u_2^1) = \rho \frac{h^2}{12} D_{tt} u_2^1.
\end{aligned} \tag{43}$$

Сеточные операторы D_{ij} аппроксимируют тождественный I и дифференциальные операторы $\partial/\partial X^j$, $\partial^2/\partial X^j \partial X^k$: $D_{00} \approx I$; $\left\{ D_{j0}, D_{0j} \approx \frac{\partial}{\partial X^j} \right\}$; $\left\{ D_{jk}, D_{kj} \approx \frac{\partial^2}{\partial X^j \partial X^k} \right\}$ и имеют разный вид в зависимости от типа ячеек: для четырехугольных ячеек

$$D_{jk} = d_j^+ d_k^- \quad (j, k = 0, \dots, n), \tag{44}$$

для треугольных –

$$D_{jk} = \frac{1}{2}(d_j^{1+} d_k^{1-} + d_j^{2+} d_k^{2-}) \quad (j, k = 0, \dots, n). \tag{45}$$

Индексы 1, 2 соответствуют двум типам ячеек (треугольников), составляющих базовую ячейку основной сетки (параллелограмм). Здесь $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22}$ – сеточный оператор Лапласа. Разностная схема (43) записана в форме, аналогичной исходной системе уравнений; отличие состоит в том, что дифференциальные операторы заменены разностными.

Приведем также численную схему билинейного 4-узлового конечного элемента на ортогональной сетке с шагами h_1, h_2 вдоль осей координат

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-\nu^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} (D_{12} u_2^0 - D_{22} u_1^0) = \rho D_{tt} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-\nu^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} (D_{21} u_1^0 - D_{11} u_2^0) = \rho D_{tt} u_2^0, \\
& \frac{E k^2}{2(1+\nu)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01} u_1^1 + D_{02} u_2^1) = \rho D_{tt} u_3^0, \\
& \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{E h^2}{24(1-\nu)} (D_{12} u_2^1 - D_{22} u_1^1) - \\
& - \frac{E k^2}{2(1+\nu)} \left(D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1 - \frac{h_1^2}{12} D_{11} u_1^1 - \frac{h_2^2}{12} D_{22} u_1^1 + \right. \\
& \left. \frac{h_1^2 h_2^2}{144} D_{33} u_1^1 \right) = \rho \frac{h^2}{12} D_{tt} u_1^1, \\
& \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{E h^2}{24(1-\nu)} (D_{21} u_1^1 - D_{11} u_2^1) - \\
& - \frac{E k^2}{2(1+\nu)} \left(D_{20} u_3^0 + D_{00} u_2^1 - \frac{h_1^2}{12} D_{11} u_2^1 - \right. \\
& \left. - \frac{h_2^2}{12} D_{22} u_2^1 + \frac{h_1^2 h_2^2}{144} D_{33} u_2^1 \right) = \rho \frac{h^2}{12} D_{tt} u_2^1
\end{aligned} \tag{46}$$

и численную схему треугольного линейного конечного элемента

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-\nu^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} (D_{12} u_2^0 - D_{22} u_1^0) = \rho D_{tt} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-\nu^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-\nu)} (D_{21} u_1^0 - D_{11} u_2^0) = \rho D_{tt} u_2^0, \\
& \frac{E k^2}{2(1+\nu)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01} u_1^1 + D_{02} u_2^1) = \rho D_{tt} u_3^0, \\
& \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{E h^2}{24(1-\nu)} (D_{12} u_2^1 - D_{22} u_1^1) - \\
& - \frac{E k^2}{2(1+\nu)} \left(D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1 - \frac{h_1^2}{18} D_{11} u_1^1 - \right. \\
& \left. - \frac{h_2^2}{18} D_{22} u_1^1 - \frac{h_1 h_2}{18} D_{12}^{\times} u_1^1 \right) = \rho \frac{h^2}{12} D_{tt} u_1^1, \\
& \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{E h^2}{24(1-\nu)} (D_{21} u_1^1 - D_{11} u_2^1) - \\
& - \frac{E k^2}{2(1+\nu)} (D_{20} u_3^0 + D_{00} u_2^1 - \\
& - \frac{h_1^2}{18} D_{11} u_2^1 - \frac{h_2^2}{18} D_{22} u_2^1 - \frac{h_1 h_2}{18} D_{12}^{\times} u_2^1) = \rho \frac{h^2}{12} D_{tt} u_2^1.
\end{aligned} \tag{47}$$

Схемы (46), (47) по сравнению со схемой (43) имеют ряд дополнительных малых слагаемых порядка $(\Delta X)^2$ и выше.

Для теоретического анализа рассмотрим также одномерные конечно-разностную, вариационно-разностную и конечно-элементные схемы задач теории пластин Тимошенко [21].

Рассмотрим систему уравнений, описывающую поперечные колебания пластин Тимошенко в одномерном случае. Для удобства дальнейшего рассмотрения приведем ее к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные $x = X/L$, $\tau = t \cdot c/L$, $w = W/L$, $\psi = \Psi/L$, $\eta = h/L$, $\Delta x = h_1/L$. Здесь L – некоторый линейный размер, $c = [E/(\rho(1-\nu^2))]^{1/2}$ – скорость звука. Ниже все формулы приводятся в безразмерных величинах. Система

(одномерный аналог трех последних уравнений (39)) примет вид

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{12a}{\eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Она эквивалентна одному уравнению четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12a}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} - \left(1 + \frac{1}{a} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial T^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial T^4} = 0. \quad (49)$$

Рассмотрим разностные схемы, аппроксимирующие систему уравнений (48), записанную в безразмерных величинах. Это известная в литературе [6, 8, 12] конечно-разностная схема

$$\begin{aligned} \Phi(w, \psi) &= a (D_{11}w + D_{01}\psi) - D_{TT}w = 0 \\ \Lambda(w, \psi) &= D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2} (D_{01}w + \psi) - D_{TT}w = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

вариационно-разностная схема

$$\begin{aligned} \Phi(w, \psi) &= a (D_{11}w + D_{01}\psi) - D_{TT}w = 0 \\ \Lambda'(w, \psi) &= D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2} (D_{01}w + D_{00}\psi) - D_{TT}w = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

и схема линейного конечного элемента

$$\begin{aligned} \Phi(w, \psi) &= a (D_{11}w + D_{01}\psi) - D_{TT}w = 0, \\ \Lambda''(w, \psi) &= D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2} \left(D_{01}w + D_{00}\psi - \frac{h_1^2}{12} D_{11}\psi \right) - D_{TT}w = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Системы (50)–(52) отличаются аппроксимацией единственного члена уравнений – функции ψ : с помощью тождественного оператора в (50), оператора D_{00} в (51) и оператора $D_0^\times = D_{00} - \frac{h_1^2}{12} D_{11}$ в (52). При этом все три схемы имеют второй порядок аппроксимации. Преобразуем их с помощью эквивалентных преобразований к виду, аналогичному (49). Конечно-разностная схема (50) примет вид

$$\begin{aligned} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{\eta} \right)^2 \right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{\eta^2} D_{TT} w - \\ - \left(1 + \frac{1}{a} \right) D_{11} D_{TT} w + \frac{1}{a} D_{TT} D_{TT} w = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Вариационно-разностная схема (51):

$$D_{11}D_{11}w + \frac{12}{\eta^2}D_{00}D_{\text{тт}}w - \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w + \frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w = 0. \quad (54)$$

Схема линейного конечного элемента (52):

$$\begin{aligned} &\left(1 + a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)D_{11}D_{11}w + \frac{12}{\eta^2}D_0^\times D_{\text{тт}}w - \\ &- \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w + \frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Сопоставляя (53)–(55) с исходным дифференциальным уравнением (49), приходим к выводу, что при конечных значениях величины $(\Delta x/\eta)$ (отношения шага сетки к толщине пластины) сеточные уравнения (53) и (55) аппроксимируют не (49), а, соответственно, уравнения

$$\left(1 + 3a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \text{т}^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \text{т}^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial \text{т}^4} = 0. \quad (56)$$

и

$$\left(1 + a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \text{т}^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \text{т}^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial \text{т}^4} = 0. \quad (57)$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что хотя сходимость в обычном смысле имеет место (при $\Delta x \rightarrow 0$ коэффициенты уравнений (56) и (57) стремятся к соответствующим коэффициентам уравнения (49)), конечно-разностная и конечно-элементные схемы не обладают равномерной сходимостью по параметру сеточной задачи $\Delta x/\eta$.

С практической точки зрения достаточная точность решения может быть обеспечена лишь на сетках с малым значением отношения $(\Delta x/\eta)$ (отношение безразмерных величин $\Delta x/\eta$ равно отношению размерных величин h_1/h), что существенно снижает их эффективность. В отличие от них сеточное уравнение (54), а соответственно, и вариационно-разностная схема (51) аппроксимирует (49) при любых значениях параметра сеточного уравнения $\Delta x/\eta$ и не накладывает никаких ограничений на шаг пространственной сетки по сравнению с толщиной оболочки. Схема (51) обладает равномерной сходимостью по параметру $\Delta X/h$. Следовательно, ограничения на величину пространственного шага сетки определяются не толщиной

пластины, а характером решения, то есть той частью спектра решения, которая является существенной в каждой конкретной задаче.

Недостатки схем (50), (52) не видны в их исходной записи, но становятся очевидными после преобразования их к одному уравнению (53) или (55). Их проявлением является наличие в преобразованных схемах дополнительных слагаемых. Причина этого кроется в несогласованной аппроксимации функций, первых и вторых производных. Количественный анализ, подтверждающий сделанные выводы, приведен в [2, 5].

Аналогичный анализ аппроксимации был проведен и для двумерных схем, в результате чего был сделан теоретический вывод, что единственной схемой, обладающей равномерной сходимостью, является вариационно-разностная схема на четырехугольных ячейках. Это хорошо согласуется с вычислительной практикой численного решения задач теории пластин и оболочек, и в частности, с известным приемом сокращенного интегрирования О.Зенкевича [26], благодаря которому схема МКЭ (46) превращается в вариационно-разностную (43). Также был предложен способ усовершенствования схемы (47) на треугольных ячейках (см. ниже).

Полученное выше конечно-разностное представление вариационно-разностных схем позволило получить для них точные аналитические оценки устойчивости, в том числе на косоугольных сетках [4, 11]. Анализ устойчивости проводился стандартным образом на основе спектрального критерия Неймана.

Аналогичным образом были получены оценки устойчивости явных схем решения двумерных и трехмерных задач теории упругости. Также анализ явного вида записи вариационно-разностных схем позволил развить и теоретически обосновать предложенный В.Г.Баженовым способ повышения их эффективности путем введения фиктивной инерции вращения [1].

3. Индексная коммутативность численного дифференцирования [3]

При анализе причин плохой сходимости конечно-разностной и конечно-элементных схем решения задач теории пластин Тимошенко было установлено, что ее источником является несогласованность операторов, аппроксимирующих функции, первые и вторые производные. Так, уже в одномерном случае для центральных разностей имеем

$$\left(f_X^0\right)_X^0 \neq f_{X\overline{X}}. \quad (58)$$

Здесь использованы обозначения [13]:

$$\begin{aligned} f_X &= (f_{i+1} - f_i) / \Delta x, & f_{\overline{X}} &= (f_i - f_{i-1}) / \Delta x, \\ f_X^0 &= (f_{i+1} - f_{i-1}) / (2 \cdot \Delta x) & f_{X\overline{X}} &= (f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}) / (\Delta x)^2. \end{aligned} \quad (59)$$

В одномерной вариационно-разностной схеме данная несогласованность устраняется с помощью аппроксимации функции нетождественным оператором D_{00} . В результате получаем для системы операторов

$$\begin{aligned} (D_{00}f)_i &= \frac{1}{4}(f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}), (D_{01}f)_i = (D_{10}f)_i = \\ &= \frac{1}{2\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}), (D_{11}f)_i = \frac{1}{\Delta x^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \end{aligned}$$

выполнение тождества

$$D_{00}D_{11} = D_{10}D_{01} \quad (60)$$

Для конечно-разностной схемы имеем неравенство (59), для схемы МКЭ ввиду другой аппроксимации функции равенство (60) также не будет выполняться.

В многомерных случаях потребуем выполнения аналогичных свойств, аналогичных свойствам операторов дифференцирования.

Пусть $f(X^1, \dots, X^n) \in C^4(R^n)$, тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^i} \left(\frac{\partial f}{\partial X^j} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j}, \\ \frac{\partial}{\partial X^i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^j \partial X^k} \right) &= \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^k} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^k \partial X^l} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^l} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^j \partial X^k} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Разностные операторы (45) обладают аналогичными свойствами:

$$D_{ij} D_{kl} = D_{kj} D_{il} = D_{il} D_{kj} \quad (i, j, k, l = 0, \dots, n) . \quad (62)$$

Равенства (62) вытекают из определения операторов D_{ij} и коммутативности линейных сеточных операторов:

$$\begin{aligned} D_{ij} D_{kl} &= d_i^+ d_j^- d_k^+ d_l^- = d_k^+ d_j^- d_i^+ d_l^- = \\ &= D_{kj} D_{il} = d_i^+ d_l^- d_k^+ d_j^- = D_{il} D_{kj} . \end{aligned} \quad (63)$$

Назовем свойства (62) индексной коммутативностью численного дифференцирования.

Ввиду того, что в большинстве разностных схем первые и вторые производные аппроксимируются независимо, свойства, аналогичные (61), для разностных операторов, как правило, не выполняются. Например, операторы (46) свойствам (63) не удовлетворяют.

При выполнении свойств индексной коммутативности (62) [3] разностные схемы можно преобразовывать аналогично исходным дифференциальным уравнениям, при этом сохраняются групповые свойства исходных систем уравнений, что в некотором смысле аналогично свойству полной консервативности. Свойства (62) будут выполняться, если в каждой базовой ячейке основной сетки находится ровно одна расчетная ячейка вариационно-разностной сетки и все ячейки одинаково ориентированы в пространстве. Исходя из этого была реализована вариационно-разностная <ажурная> схема теории пластин и оболочек на треугольных ячейках, в которой были оставлены только одинаково ориентированные треугольники, показавшая значительно лучшую сходимость по сравнению с традиционной вариационно-разностной схемой на треугольных ячейках [3].

4. Ажурные вариационно-разностные и конечно-элементные схемы

В формулах (18), (29), (33), (38) приведен общий вид конечно-разностного представления вариационно-разностных схем (18) и схем МКЭ разного типа (лагранжевых, эрмитовых и др.) (29), (33), (38) на равномерных сетках. В них присутствуют коэффициенты $\gamma_k = V_k^{\text{эл}} / \Delta V$, где $V_k^{\text{эл}}$ – объем эле-

мента (или ячейки вариационно-разностной схемы) k -го типа, ΔV – объем ячейки (n -мерного параллелепипеда) базовой равномерной сетки вида (1) в R^n . Коэффициенты γ_k удовлетворяют очевидному равенству

$$\sum_{k=1}^p \gamma_k = 1, \quad (64)$$

отражающему факт сплошного заполнения элементами расчетной области (здесь p – число элементов, составляющих ячейку). Варьируя набор коэффициентов γ_k при сохранении равенства (64), можно получить новые разностные схемы, некоторые из которых могут быть весьма удачными. Так, в частности, в вариационно-разностной схеме (43) на треугольных ячейках коэффициенты равны: $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$. Заменяя их значениями $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$, получим <ажурную> вариационно-разностную схему, в которой сеточные операторы (45) заменяются операторами

$$D_{jk} = d_j^{1+} d_k^{1-} \quad (j, k = 0, \dots, n), \quad (65)$$

удовлетворяющими свойствам индексной коммутативности. В результате полученная схема обладает гораздо лучшей сходимостью по сравнению с исходной. Отметим также ее большую экономичность, поскольку она фактически имеет в два раза меньше расчетных ячеек. Подробный анализ и тестирование данной схемы приведены в [2].

Развивая далее этот прием, приходим к идее ажурных схем МКЭ. Под ажурной схемой будем понимать схему, у которой некоторые коэффициенты γ_k равны нулю. При этом соответствующие элементы не вносят никакого вклада в численную схему и могут быть исключены из расчетов. Такой подход оказался весьма плодотворным при решении трехмерных задач теории упругости. В частности, была предложена схема на базе линейного 4-узлового конечного элемента, у которой для центрального тетраэдра (рис.1.) коэффициент γ_k равнялся 1, у остальных тетраэдров – нулю. Данная схема существенно экономичнее традиционной и обладает лучшей сходимостью. Также она не имеет известного недостатка, присущего численным схемам на гексаэдральных элементах – неустойчивости типа <песочные часы> (hourglassing).

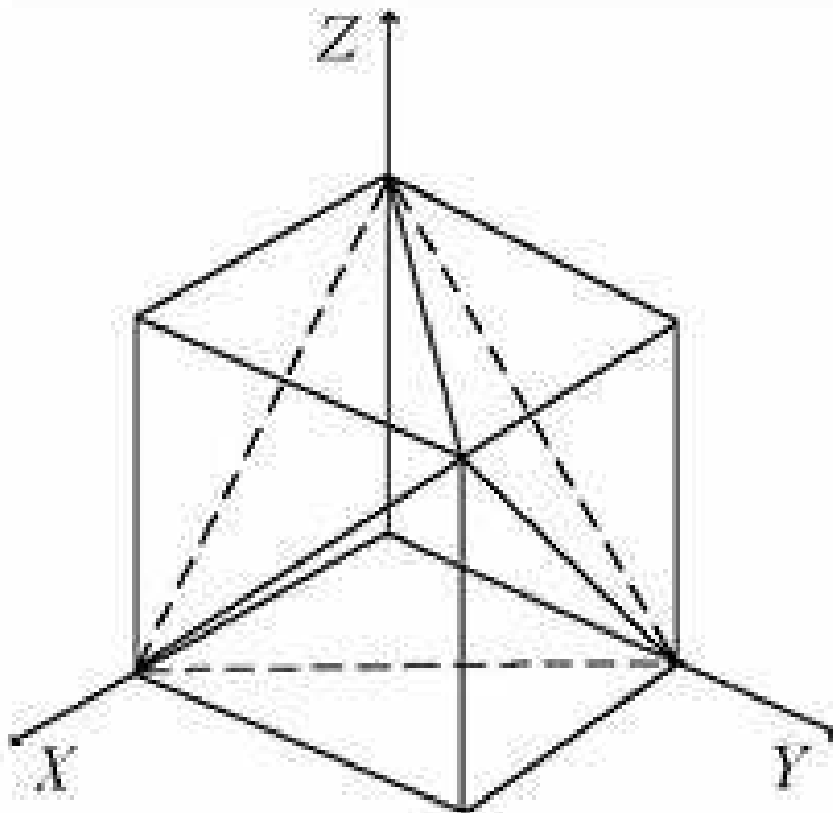


Рис. 1:

Описание схемы, результаты ее анализа и тестирования изложены в работах [9, 11, 19, 22, 24].

Заключение

Описанный в работе метод исследования численных схем, основанных на вариационной постановке задач, позволяет более глубоко изучать их свойства и предлагать пути усовершенствования, что подтверждается рассмотренными примерами. Он отчасти позволяет преодолеть разрыв между теориями разностных схем и метода конечных элементов. Данный подход может быть применен к анализу самых разнообразных схем МКЭ решения задач математической физики. Вместе с тем следует отметить, что рассмотренные выше примеры анализа относятся только к простейшим схемам линейных и полилинейных конечных элементов. Анализ более сложных схем МКЭ ввиду сложности получаемых систем сеточных уравнений, по-видимому, возможен только с привлечением программ аналитических

вычислений типа Maple.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-97052 р_поволжье_а).

Список литературы

- [1] *Баженов В.Г., Ломунов В.К., Чекмарев Д.Т.* Численное моделирование нелинейных задач динамики упругопластических конструкций // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 1. – С. 10–16.
- [2] *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек. – Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. – 159 с.
- [3] *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 5. – С. 662–674.
- [4] *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы “крест” решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. – Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1984. – Вып. 28. – С. 15-22.
- [5] *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом . Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. – 118 с.
- [6] *Борисенко В.И., Клокова А.И.* Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе // Прикладная механика. – 1966. – Т. 11, N 10. – С. 29–35.
- [7] *Голованов А.И., Корнишин М.С.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. – Казань: Казанский физико-технмческий институт, 1990. – 269 с.

- [8] *Гордиенко Б.А.* О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – № 3. – С. 143-148.
- [9] *Жидков А.В., Зефирова С.В., Кастальская К.А., Спирин С.В., Чекмарев Д.Т.* Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2011. – № 4, часть 4. – С. 1480–1482.
- [10] *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. под ред Н.С. Бахвалова. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
- [11] *Кастальская К.А., Чекмарев Д.Т.* Устойчивость явных ажурных схем <крест> решения динамических задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. – 2011. – Вып. 73. – С. 77–86.
- [12] *Пацюк В.И., Рыбакова Г.А., Сабодаш П.Ф.* Волновые процессы в цилиндрической оболочке при неосесимметричном продольном ударе // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 35–42.
- [13] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М. Наука, 1983. – 616 с.
- [14] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
- [15] *Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю.* Операторные разностные схемы // Диф. уравнения. – 1981. – Т. 17, N 7. – С. 1317–1327.
- [16] *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
- [17] *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967.
- [18] *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С.212-263.

- [19] *Чекмарев Д.Т.* “Ажурные” схемы метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. – М., 1997.
- [20] *Чекмарев Д.Т.* Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и конечно-элементных схем. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации <Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике>. – Нижний Новгород, 2007. – 88 с. // Электронное издание: www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/44.pdf.
- [21] *Чекмарев Д.Т.* Анализ некоторых схем МКЭ теории оболочек типа Тимошенко // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. – М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1995. – С.124–132.
- [22] *Чекмарев Д.Т.* Об эффективности использования узловой информации при решении трехмерных задач методом конечных элементов// Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 415-420.
- [23] *Чекмарев Д.Т.* Построение конечноразностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. – М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1999. – С. 129–138.
- [24] *Чекмарев Д.Т.* Численные схемы метода конечного элемента на <ажурных> сетках// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 2. – С.49-54.
- [25] *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.

- [26] *Zienkiewicz O.C., Too J., Taylor R.L.* Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Int.J. Num.Meth.Engng. – 1971. – V. 3, No. 2. – P. 275–290.